Uppgifter FYTA11, kapitel 8 och 9

1.

Exempel på linjärt vektorrum med en linjär operator.

Rummet $\mathbb{V}$ av funktioner av en vinkel u, av typen

$$f(u) = r\sin(u+\varphi), \text{ med } r, \varphi \in \mathbb{R}$$

kan ses som ett reellt, linjärt vektorrum.

a) Visa detta, dvs. visa att en linjärkombination av två sådana funktioner, f_1 och f_2, också ligger i rummet. (Utnyttja gärna vanliga trigonometriska manipulationer.)

b) Ange dimensionen av $\mathbb{V}$ och välj en ortonormerad bas med avseende på skalärprodukten

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)g(u)\mathrm{d}u$$

(Eftersom rummet är reellt, kan vi skriva $f(u)g(u)$ i stället för $f^*(u)g(u)$.)

c) Låt nu $\mathcal{A}$ vara deriveringsoperatorn, $\mathcal{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$. Visa att $\mathcal{A}$ är en linjär operator som avbildar $\mathbb{V}$ på $\mathbb{V}$, det vill säga, när $f(u)$ tillhör $\mathbb{V}$ så kommer resultatet av $\mathcal{A}f(u)$ också att tillhöra $\mathbb{V}$.

d) Ange $\mathcal{A}$ i komponentform i din bas, dvs skriv ned den matris A som representerar $\mathcal{A}$.

e) Visa att matrisen A uppfyller villkoret $A^2 = -\mathbb{1}$. Förklara varför detta måste vara fallet.

2. I bokens uppgift 15.2b ska vi bl.a. hitta en partikulärlösning till $f''(x) + 2f'(x) + 5f = \exp(-x)\cos 3x$. Ett sätt att göra det systematiskt är att söka ett vektorrum $\mathbb{V}$ av funktioner $g(x)$ där högerledet $g_1(x) = \exp(-x)\cos 3x$ ingår, och där $g(x) \in \mathbb{V}$ medför $g'(x) \in \mathbb{V}$.

a) Visa att $g_1(x)$ ensam inte kan spänna ett sådant vektorrum, eftersom $g_2(x) = g_1'(x)$ då inte tillhör rummet.

b) Prova ett tvådimensionellt rum av funktioner $g(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$, för $a, b \in \mathbb{R}$. Om $g'(x) \in \mathbb{V}$ är du klar, annars får du lägga till nya funktioner $g_3(x)$ osv. Bestäm på så vis lägsta dimension för ett sådant rum, och välj en bas för rummet. (Basen behöver inte normeras, så vi behöver inte definiera någon skalärprodukt.)

c) Uttryck deriverings-operatorn som en matris i basen.

d) Uttryck operatorn $\mathcal{B} = (\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 5\cdot)$ som en matris i basen. (Operatorn "5 gånger..." skrivs i matrisform $5\mathbb{1}$.)

e) Finn den funktion $y_p(x) = ag_1(x) + bg_2(x) + \ldots$ som uppfyller $\mathcal{B}y_p(x) = g_1(x)$. Därmed är $y_p(x)$ partikulärlösning till differentialekvationen.

3. En 3×3-matris har konstant radsumma s. (Elementen i varje rad adderar alltså ihop till samma tal s.)

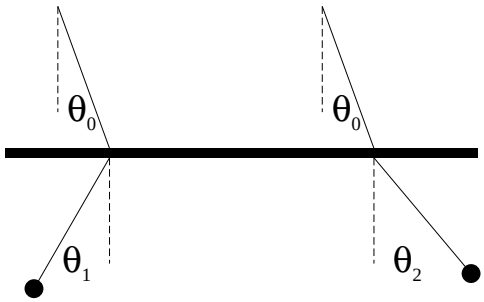
a) Visa att s är ett egenvärde till matrisen.

b) Visa att $(1, 1, 1)$ är en egenvektor till matrisen, med egenvärdet s.

c) Visa att resultatet gäller godtycklig dimension N, dvs. att konstant radsumma s i en $N \times N$-matris medför att en vektor med alla komponenter lika är en egenvektor med egenvärde s.

d) Visa att en matris med konstant kolonn-summa s har s som ett egenvärde. (Du behöver inte visa något om egenvektorn.)

4. På experimentarium i Köpenhamn finns (eller fanns) en skojig dubbel-gunga. Två soffbänkar hänger i en tung, horisontell ram, som i sin tur är upphängd i taket. Bänkarna och ramen sitter ihop i stänger, som kan vridas i sina fästpunkter. Bänkarna och ramen kan därmed svänga i samma vertikalplan. Ramen förblir hela tiden horisontell. Stängerna i ramens upphängning beskriver samma vinkel θ_0 mot vertikalen. Soffornas stänger beskriver var sin vinkel θ_1 respektive θ_2 mot vertikalen.



Vi kallar ramens massa M och ena bänkens massa (med sittande besökare) för αM. För enkelhets skull antar vi att andra bänken med besökare har samma massa, att stängernas massor kan försummas, och att alla stänger har samma längd l.

a) Med $\mathbf{q} = (\theta_0 \;\; \theta_1 \;\; \theta_2)^\top$, bestäm konstanta, symmetriska matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ så att potentiella energin nära jämvikt är $V \approx V_0 + \frac{1}{2}\mathbf{q}^\top \mathbf{B}\mathbf{q}$ (för någon ointressant konstant V_0) och kinetiska energin nära jämvikt är $T \approx \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}$ (med likhet då $\mathbf{q} = 0$).

b) Visa att systemets egenfrekvenser ω bestäms av

$$\begin{vmatrix} \gamma(1-\mu) & 1 & 1 \\ 1 & 1-\mu & 0 \\ 1 & 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

där $\mu = \frac{g}{l\omega^2}$ och $\gamma = \frac{1+2\alpha}{\alpha}$.

c) Finn tre lösningar μ_i och ange tillhörande egenriktningar $\mathbf{q}^{(i)}$ (sånär som på en godtycklig konstant). Beskriv motsvarande rörelser (t.ex: vilka delar rör sig, vilka utslag är störst, vilka är i fas resp. motfas).

d) Antag att bänkarna är mycket lättare än ramen ($\alpha \ll 1$). Visa att egenfrekvenserna kan skrivas ω_0 och $\omega_0 \pm \Delta\omega$, dvs att mellanfrekvensen ligger mitt emellan övriga frekvenser. Visa särskilt att $\Delta\omega \ll \omega_0$. *Ledning:* Det går inte att Taylorutveckla direkt i α, men det går att utveckla i en lämplig funktion $\varepsilon(\alpha)$, som uppfyller $\varepsilon(0) = 0$.

Kommentar: För att förstå varför denna dubbelgunga är "skojig" behöver man lösa nästa uppgift.

5. Lös först föregående uppgift. Inför fortsättningen påminner vi oss att systemets rörelse kan skrivas $\mathbf{q}(t) = \sum_i \cos(\omega_i t + \beta_i)\mathbf{q}^{(i)}$ där $\mathbf{q}^{(i)}$ är egenriktning till frekvensen ω_i. Konstanterna β_i, samt normeringarna av $\mathbf{q}^{(i)}$, bestäms av begynnelsevillkoren.

a) Två (exakt lika tunga) besökare sitter i var sin soffa och spjärnar med fötterna mot golvet så att hela systemet är stilla vid tiden $t = 0$. Visa att alla $\beta_i = 0$. (Någon egenmod kanske ej ingår i rörelsen, så att dess riktning $\mathbf{q}^{(i)}$ normeras med faktorn noll. Då kan man sätta dess β_i till vad som helst. Till exempel noll.)

b) Vid tiden $t = 0$ hänger den tunga ramen så lågt som möjligt och den ena soffan så lågt som möjligt, medan positionen för sista soffan ges av vinkeln $\theta_2 = a$. Bestäm normeringarna av egenriktningarna.

c) Vid tiden $t = 0$ lyfter besökarna sina fötter och låter systemet börja röra sig. Med approximationen $\alpha \ll 1$, visa att systemets rörelse blir

$$\begin{aligned}
\theta_0(t) &= a\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sin(\omega_0 t)\sin(\Delta\omega t) \\
\theta_1(t) &= -a\cos(\omega_0 t)\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \\
\theta_2(t) &= a\cos(\omega_0 t)\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right)
\end{aligned}$$

Kommentar: Eftersom $\Delta\omega \ll \omega_0$ kommer besökarna att uppleva en nästan harmonisk svängning med vinkelfrekvens ω_0, men amplituden av svängningen varierar långsamt, och "byter plats". Vid tider $t = n\pi/\Delta\omega$, ger jämna n att bänk 2 har sin maxamplitud, medan bänk 1 verkar vara stilla. Vid udda n är det tvärtom. Det känns som att man ger varandra fart, trots att man sitter stilla utan att knuffa med sina fötter. Anledningen är att normalmoder med liknande frekvens växlar mellan att vara i fas för den ena respektive andra bänken. Tyvärr har de flesta besökare inte gått en kurs i normalmoder och puttar ivrigt med sina fötter alldeles för ofta för att kunna märka några långsamma "amplitud-oscillationer". En del är till och med så outbildade att de väger olika mycket. Det förstör visserligen inte effekten, men den blir mycket svårare att räkna fram.